$$= \frac{xe^{3x} - e^{2x}(1+2x)(e^x - 1)}{x^2 e^{4x}} = \frac{e^{2x}[xe^x - (1+2x)(e^x - 1)]}{x^2 e^{4x}}$$

$$= \frac{xe^x - e^x + 1 - 2xe^x + 2x}{x^2 e^{2x}} = \frac{-xe^x - e^x + 1 + 2x}{x^2 e^{2x}} = \frac{1 + 2x - e^x(1+x)}{x^2 e^{2x}}$$

b) $g'(x) + e^{-2x} = \frac{1 + 2x - e^x(1+x)}{x^2 e^{2x}} + e^{-2x}$

$$= \frac{1 + 2x - e^x(1+x) + x^2 e^{2x} e^{-2x}}{x^2 e^{2x}}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - e^x(x+1)}{x^2 e^{2x}} = \frac{(x+1)(x+1-e^x)}{x^2 e^{2x}} = \frac{-(x+1)\,h(x)}{x^2 e^{2x}}$$

or $\forall x > 0$, $x+1 > 0$ et $h(x) > 0$ d'où $\forall x > 0$, $g'(x) < -e^{-2x}$.

4°/a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{xe^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-e^{-x}}{xe^x}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

b) On a : $\forall x > 0$, $g'(x) < -e^{-2x} < 0$ (car $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^{-2x} > 0$)

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	↘	0

5°/ g est continue, strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ donc g est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $g(\mathbf{R}_+) =]0, 1]$.

Solution 5 :

1°/ • $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow 1 - x \geq 1$

d'où $\ln(1-x)$ est définie pour $x \leq 0$.

• $xe^{\frac{-1}{x}}$ est définie pour tout $x > 0$ d'où $D_f = \mathbf{R}$.

2°/ • $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} xe^{\frac{-1}{x}} = 0$ (car $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{-1}{x}} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$)

• $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln(1-x) = \ln 1 = 0$